# 427. 射影幾何ノ基本定理ニツイテ

栗田　稔（東大學生）

Von Staudt ノ定理

一ツノ射影直線上ノ点変換 $x'=f(x)$ ニ於イテ

1° 對應ハ一對一

2° 調和列点ハ調和列点ニウツル.

トキハ，コノ変換ハ射影変換ニ外ナラナイ。

コノ定理ハ synthetisch ニハ既ニ証明サレテヰマス ノニ（例ヘバ Blaschke: Differentialgeometrie III § 50）analytisch ナ証明デハ手許ニアル二、三ノ書デイヅレモ連続性ヲ假定シテヰマス、之レヲ假定シナイ analy-

*tisch* ナ証明ヲ次ニ試ミテミマス、先ヅ

*lemma.* 一價函數 $f(x)$ ガ

$$f(x)+f(y)=f(x+y)$$

ヲ満足シ且ツ任意ニ小ナル $x=0$ ノ近傍デハ常ニ

$$x>0 \text{ ナラバ } f(x)>0$$

トナルトキハ $f(x)=cx \qquad c>0$

デアル。

証明. 通常行ハルル証明ニヨリ

$$x \text{ ガ有理数ナラバ } f(x)=xf(1).$$

又 $y=0$ カラ $f(0)=0$

従ッテ $f(-x)=-f(x)$

次ニ十分近イ二数 $a,\ a+\varepsilon$ ヲトルトキ $\varepsilon>0$ トスレバ

假定ニヨリ

$$f(a+\varepsilon)-f(a)=f(a+\varepsilon)+f(-a)=f(\varepsilon)>0$$

即チ $f(x)$ ハ單調増加デアル、然ルニ $x$ ガ有理数ナルトキ $f(x)=xf(1)+1$ ダカラ常ニ

$$f(x)=xf(1)$$

定理ノ証

先ヅ對應スル三点ヲトリ、各点列ニソレゾレ適當ナ射影変換ヲ施シテ先ニトッタ對應スル三点ノ對ヲ $0$ ニハ $0$ $1$ ニハ $1$, $\infty$ ニハ $\infty$ ガ對應スルヤウニスル、サウスレバ問題ハ

$$\frac{x_1-x_3}{x_1-x_4}:\frac{x_2-x_3}{x_2-x_4}=-1 \text{ ナルトキハ常ニ}$$

$$\frac{f(x_1)-f(x_3)}{f(x_1)-f(x_3)} : \frac{f(x_2)-f(x_3)}{f(x_2)-f(x_4)} = -1$$

トナル函数 $f(x)$ ハ $x$ ニ他ナラナイコトヲイフコトニナリマス。

$x_4=\infty$ ニトレバ $f(x_4)=\infty$ ダカラ

$x_1+x_2=2x_3$ ナルトキ　$f(x_1)+f(x_2)=2f(x_3)$

即チ　$f(x_1)+f(x_2)=2f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)$

$x_2=0$ トオケバ $f(0)=0$ ナルコトニヨリ

$$f(x)=2f\left(\frac{x}{2}\right)$$

従ッテ　$f(x_1)+f(x_2)=f(x_1+x_2)$

ソレデ　$f(x)\pm f(y)=f(x\pm y)$

$x_1-x_3=p,\ x_2-x_3=q,\ x_1-x_4=r,\ x_2-x_4=s$ トオケバ

$$\frac{p}{r}:\frac{q}{s}=-1 \text{ ナルトキ } \frac{f(p)}{f(r)}:\frac{f(q)}{f(s)}=-1$$

トナル、所が　$p-q=r-s.$

ソレデ　$r=p\frac{p-q}{p+q}$　　$s=-q\frac{p-q}{p+q}$

従ッテ　$f(p)f(s)+f(r)f(q)=0$ カラ

$$f(p)f\left(-q\frac{p-q}{p+q}\right)+f\left(p\frac{p-q}{p+q}\right)f(q)=0$$

$p+q=2u$　$p-q=2v$ トオケバ

$$f(u+v)f\left(-(u-v)\frac{v}{u}\right)+f\left((u+v)\frac{v}{u}\right)f(u-v)=0$$

之カラ　$f(u)f\left(\frac{v^2}{u}\right)=\{f(v)\}^2$

$u, v$ ハ独立ダカラ $u=1$ トオクトキ $f(1)=1$ ナルコトヲ用

ヒレバ

$$f(v^2) = \{f(v)\}^2 \geqq 0$$

即チ $x>0$ ナル限リ　$f(x) \geqq 0$

$f(x)=0$ トナルコトハナイ，ソレハモシ一度ナレバ $f(x)\equiv 0$ トナルカラ

ソレデ　$x>0$　ナラバ　$f(x)>0$

従ッテ　$f(x)=xf(1)=x$　　即チ証明サレタ．

以上ノコトヲ用ヒレバ二次元以上デモ射影幾何ノ基本定理

「$n$ 次元射影空間ノ一對一点對應デ直線ヲ直線ニウツスモノハ射影変換ニ限ル」

ガ連続ノ假定ナシニ analytisch ニ出テクルト思ヒマス．

$n=2,3$ ノトキハスグニ出マス．

尚．trivial ナコトデスガ von Staudf ノ定理デ一對一トイフ代リニ

三双ノ對應点ガ一對一デ $f(x)$ ガ一價

トオキカヘテモ上ノ証明ニハ差支ヘナイト思ヒマス。

以上何カ大キナ誤リデモシテキル様デシタラ御教示ヲ願ヒマス。（―11.6.6―）